# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

# CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2016

Durée : 3 heures

Coefficient : 2



**Matériel et documents autorisés** :

Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

**Documents à rendre avec la copie** :

– Trois annexes sur deux pages ....................................................................... pages 9/10 et 10/10

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 10 pages, numérotées de 1/10 à 10/10.

**<u>EXERCICE 1</u> (3,5 points)**

Une firme nationale fabrique des motos dans trois usines : l'usine 1, l'usine 2 et l'usine 3.
Les trois usines fabriquent trois modèles différents de motos : A, B et C.

Le nombre de motos produites par heure de travail dans les trois usines est donné dans le tableau suivant :

| Unité / Modèle | Usine 1 | Usine 2 | Usine 3 |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 2 | 3 |
| B | 8 | 5 | 5 |
| C | 5 | 3 | 3 |

On note $x, y$ et $z$ le nombre d'heures de travail respectivement dans l'usine 1, dans l'usine 2 et dans l'usine 3.
On note $a, b$ et $c$ le nombre total de motos fabriquées respectivement de modèles A, B et C.

Dans la suite de l'énoncé, on admet que cette situation peut se traduire matriciellement par l'égalité $\mathrm{Y} = \mathrm{MX}$ dans laquelle :

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. a) Durant une période donnée, 50h de travail ont été effectuées dans l'usine 1, 30h dans l'usine 2 et 26h dans l'usine 3. Donner la matrice X correspondante.
   b) Quel est le nombre de motos de modèle A fabriquées pendant cette période ? De modèle B ? De modèle C ?

2. Au cours de l'année 2015, ont été fabriquées :
   21 450 motos de modèle A ; 62 350 motos de modèle B ; 38 050 motos de modèle C.

   a) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une absence de réponse ou une réponse multiple ne rapporte ni n'enlève de point.*

On admet que la matrice $M$ est inversible. Donner parmi les trois matrices ci-dessous celle qui est l'inverse de la matrice M.

réponse A : $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -8 & -5 & -5 \\ -5 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ réponse B : $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -1 & 12 & -19 \\ 1 & -7 & 11 \end{pmatrix}$ réponse C : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) En déduire le nombre d'heures qui ont été nécessaires dans chaque usine pour réaliser cette production. Justifier.

**<u>EXERCICE 2</u> (7,5 points)**

*Un formulaire est fourni en fin d'exercice.*

*Les parties A et B sont indépendantes, la partie C utilise l'étude de la partie B.*

### Partie A – Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(E)$ suivante :

$$y'(t) + 0{,}027y(t) = 0{,}675$$

où l'inconnue $y$ est une fonction de la variable $t$, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et $y'$ est la fonction dérivée de $y$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$ :

$$y'(t) + 0{,}027y(t) = 0.$$

2. Déterminer une fonction $g$ constante, solution de l'équation différentielle $(E)$.

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de $(E)$.

4. Déterminer la solution $f$ de l'équation $(E)$ qui vérifie la condition initiale :

$$f(0) = 0.$$

## Partie B – Étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = 25 - 25\mathrm{e}^{-0,027\,t}.$$

Soit $C_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

   b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une absence de réponse ou une réponse multiple ne rapporte ni n'enlève de point.*

   La courbe $C_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

| | | |
|---|---|---|
| $y = -0,027t$ | $t = 25$ | $y = 25$ |

2. a) On admet que $f$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
   Déterminer l'expression de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur $[0;+\infty[$.

3. Avec un logiciel de calcul formel, on obtient le développement limité, à l'ordre 2 au voisinage de zéro, de la fonction $f$ :

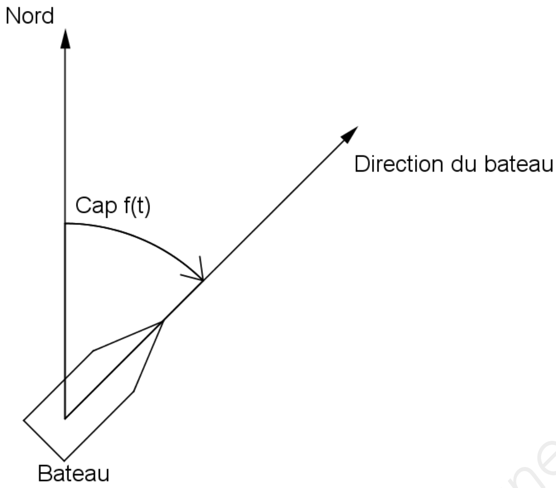
$$f(t) = 0,675\,t - 0,0091125t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

   a) En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $C_f$ au point d'abscisse 0.

   b) Préciser les positions relatives de la courbe $C_f$ et de la tangente $T$ au voisinage de ce point.
   Justifier la réponse.

## Partie C – Application à l’étude d’un cap

Le cap d’un bateau est l’angle entre la direction du bateau et la direction du nord géographique, exprimé en degré et mesuré dans le sens des aiguilles d’une montre.




Contrôler le cap d'un voilier nécessite une vigilance permanente. C'est pourquoi on utilise un pilote automatique de bateau qui permet de faire tendre le cap vers une valeur précise et préalablement fixée.

On admet que la fonction $f$ étudiée dans la partie B modélise ce cap. Plus précisément $f(t)$ représente le cap, exprimé en degré, d’un bateau en fonction du temps $t$, exprimé en seconde, après une action sur le pilote automatique.

*Pour répondre aux questions de la partie C, on pourra utiliser l’étude de la fonction $f$ réalisée dans la partie B.*

1. Donner le cap qui a été précisé au pilote automatique.
2. Déterminer le temps nécessaire, arrondi à la seconde, pour obtenir un cap supérieur à 24,9°.

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte dans la notation*

.

***FORMULAIRE***

Les solutions de l’équation différentielle homogène $(E_0)$ : $ay'(t) + by(t) = 0$ sont les fonctions $y$ définies sur un intervalle $I$ par :

$$y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \text{ avec } k \text{ constante réelle.}$$

**<u>EXERCICE 3</u> (9 points)**

Un designer souhaite créer une nouvelle police de caractère stylisée.
Pour ce faire, il utilise des courbes de Bézier.
Il souhaite s'inspirer de la lettre majuscule L cursive ci-contre.

Les études suivantes concernent la lettre L du designer vue comme la réunion de deux arcs de courbes de Bézier. La partie supérieure est l'arc de courbe $C_1$ étudiée dans la partie A et la partie inférieure est l'arc de courbe $C_2$ étudiée dans la partie B.

### Partie A – Étude de la partie supérieure de la lettre L

L'objectif de cette partie est d'étudier la courbe de Bézier $C_1$ associée aux quatre points de contrôle successifs :

$$\mathrm{P}_0(0;4);\ \ \mathrm{P}_1(10;0);\ \ \mathrm{P}_2(3;8) \text{ et } \mathrm{P}_3(1;0).$$

1. L'arc de courbe $\mathrm{C}_1$ est tracé sur **l'annexe 1 à rendre avec la copie**.
   a) Placer sur le graphique les points de contrôle $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$.
   b) Pour chaque valeur $t$ appartenant à l'intervalle$[0;1]$, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau) permet de construire le point $\mathrm{M}_1(t)$ de paramètre $t$ de la courbe de Bézier $C_1$.
   Utiliser cet algorithme pour la valeur $t = 0{,}5$ et placer le point $\mathrm{M}_1(0{,}5)$ associé. Laisser les traits de construction apparents.
2. L'arc de courbe $C_1$ est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0;1].$$

*On ne demande pas de déterminer les expressions des fonctions $f_1$ et $g_1$.*
En utilisant la courbe $C_1$ réalisée en annexe 1, compléter les deux dernières lignes du tableau des variations conjointes des deux fonctions $f_1$ et $g_1$, situé en **annexe 2 à rendre avec la copie**.
Les valeurs seront données avec la précision permise par le graphique, sans calcul. Aucune justification n'est attendue.
3. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathrm{C}_1$ au point $\mathrm{P}_3$.

## Partie B – Étude de la partie inférieure de la lettre L

On désigne par $a$ un nombre réel.

On souhaite compléter la courbe $C_1$ avec une courbe de Bézier $C_2$ en respectant les contraintes suivantes :

- Les points de contrôle successifs à la courbe $C_2$ sont

$$\mathrm{P}_3(1;0);\ \mathrm{P}_4(0;a);\quad \mathrm{P}_5(-3;3{,}5)\ \ et\ \ \mathrm{P}_6(4;0),$$

- les courbes $C_1$ et $C_2$ ont même tangente au point $\mathrm{P}_3$.

1. Dans les conditions énoncées ci-dessus, montrer alors que : $a=-4$.

Par la suite on admettra que les points de contrôle successifs de la courbe $C_2$ sont

$$\mathrm{P}_3(1;0);\ \mathrm{P}_4(0;-4);\ \ \mathrm{P}_5(-3;3{,}5)\ \ et\ \ \mathrm{P}_6(4;0).$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on rappelle que la courbe de Bézier $C_2$ associée aux 4 points de contrôle successifs $\mathrm{P}_3$, $\mathrm{P}_4$, $\mathrm{P}_5$ et $\mathrm{P}_6$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_2(t)}\ =\ B_0(t)\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}\ +\ B_1(t)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_4}+\ B_2(t)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_5}\ +\ B_3(t)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}_6}$$

où $t\in[0\ ;\ 1]$ et les $B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein de degré 3 donnés par la formule :

$$B_{\mathrm{i}}(t)=\binom{3}{i}t^i(1-t)^{3-i}$$

On rappelle que les coefficients $\binom{3}{i}$ sont des coefficients binomiaux qui peuvent être obtenus à la calculatrice ou par la formule $\binom{3}{i}=\frac{3!}{i!(3-i)!}$ .

2. Montrer que : $\mathrm{B}_2(\mathrm{t})=-3\mathrm{t}^3+3\mathrm{t}^2$. On pourra utiliser ce résultat par la suite.

3. On admet que :

$$B_0(t)=-t^3+3t^2-3t+1$$
$$B_1(t)=3t^3-6t^2+3t$$
$$B_3(t)=t^3$$

   a) L'arc de courbe $C_2$ est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=f_2(t)\\y=g_2(t)\end{cases}\quad \text{où } t\in[0;1].$$

   Montrer que

$$f_2(t)=12t^3-6t^2-3t+1.$$

   On admet que :

$$g_2(t)=-22{,}5t^3+34{,}5t^2-12t.$$

b) Étudier les variations de la fonction $f_2$ sur l'intervalle $[0; 1]$ et compléter alors le tableau de variations conjointes situé sur **l'annexe 3 à rendre avec la copie**. On arrondira si nécessaire les valeurs au dixième.

*Les résultats, concernant la fonction $g_2$ , notés dans le tableau précédent peuvent être utilisés.*
*Il n'est pas demandé de les retrouver.*

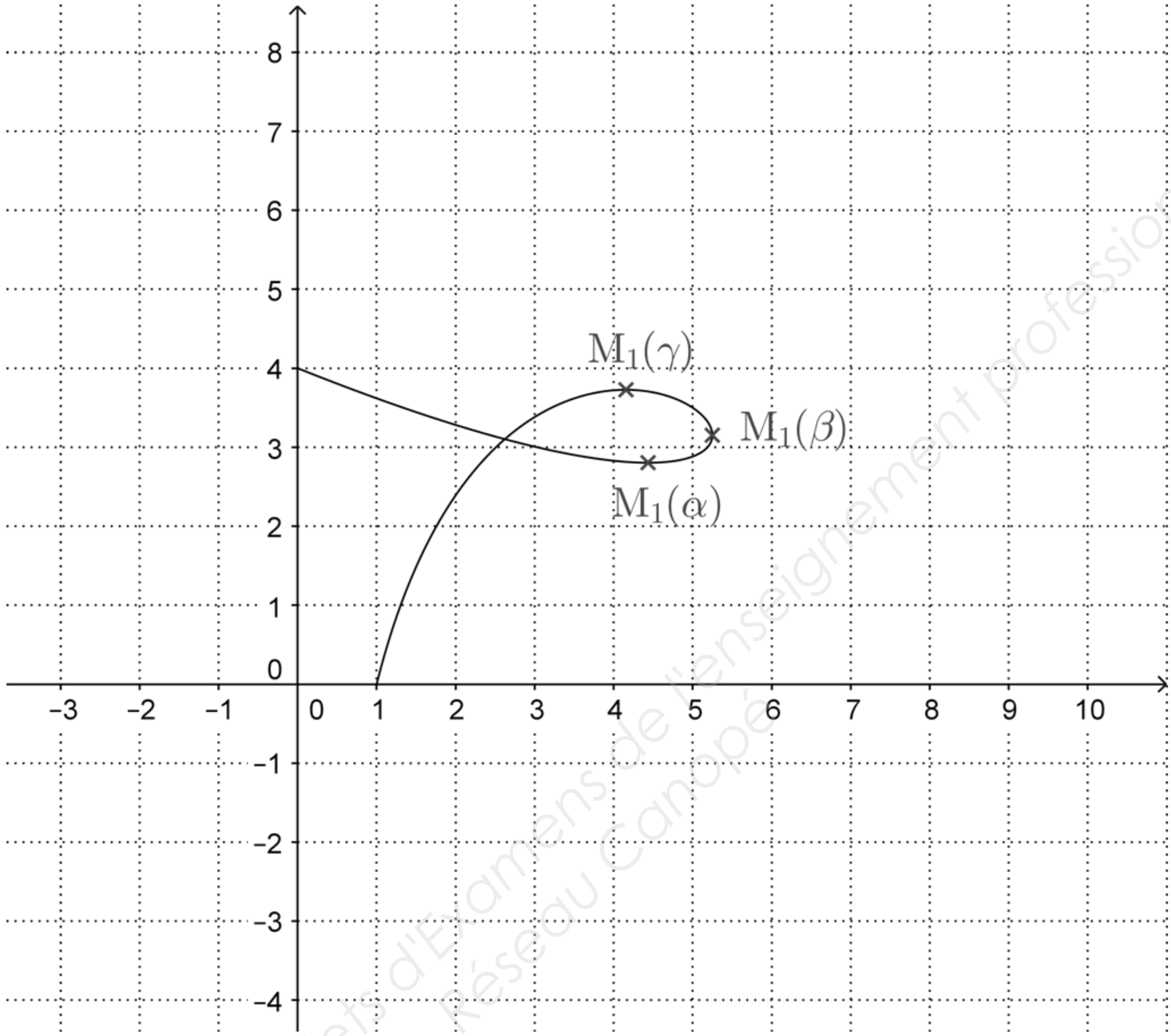
4. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe $C_2$ au point $\mathrm{M}_2(1)$.

5. Tracer les tangentes à la courbe $C_2$ aux points $\mathrm{M}_2(0)$, $\mathrm{M}_2\left(\frac{2}{9}\right)$, $\mathrm{M}_2(0{,}5)$, $\mathrm{M}_2(0{,}8)$ et $\mathrm{M}_2(1)$, puis la courbe $C_2$ sur **l'annexe 1, à rendre avec la copie**, où est déjà représenté l'arc $C_1$.

6. Le designer trouve que la boucle inférieure de la lettre est trop grande. Pour corriger ce défaut, il souhaite déplacer le point $\mathrm{P}_6$, en le gardant sur la droite d'équation $x = 4$. Proposer une position possible pour le point $\mathrm{P}_6$ qui permettrait de réduire la boucle inférieure de la lettre.

# ANNEXES À RENDRE AVEC LA COPIE

## Annexe 1



**ANNEXES À RENDRE AVEC LA COPIE**

## Annexe 2

### Tableau des variations conjointes (partie A question 2.)

| $t$ | $0$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $\gamma$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(t)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f_1(t)$ | $0$ | ↗ | $4{,}4$ | ↗ | $5{,}2$ | ↘ | $4{,}2$ | ↘ | $1$ |
| $g_1(t)$ | | | | | | | | | |
| $g'_1(t)$ | | | $0$ | | | | $0$ | | |

## Annexe 3

### Tableau des variations conjointes (partie B question 3.b))

| $t$ | $0$ | | $\frac{2}{9}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{4}{5}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(t)$ | | | | | | | | | |
| $f_2(t)$ | | | | | | | | | |
| $g_2(t)$ | $0$ | ↘ | $-1{,}2$ | ↗ | $-0{,}2$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |
| $g'_2(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $5{,}6$ | $+$ | $0$ | $-$ | |